CONCOURS D'ENTREE DES INGENIEURS DE LA VILLE DE PARIS
ouvert le 22 avril 1991

EPREUVE COMMUNE DE MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures - coefficient : 8

N.B : Le sujet comprend 3 parties, qui ne sont pas indépendantes.
Il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les candidats pourront ne pas traiter certaines questions. Ils pourront également admettre certains résultats intermédiaires et les utiliser dans la suite du problème, même s'ils ne les ont pas démontrés.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.
Il sera tenu compte dans la notation de la qualité de la rédaction et de la présentation matérielle.
On note **N** l'ensemble des entiers naturels, **Z** l'ensemble des entiers relatifs, **R** l'ensemble des réels.

Partie I :

On note **E** le **R**-espace vectoriel des fonctions définies et continues sur **R**, à valeurs dans **R**.

On note **S** le sous-espace vectoriel de **E** formé des fonctions polynômes, que l'on pourra appeler aussi plus simplement "polynômes".

Pour tout entier naturel n, on note S_n la partie de **S** formée du polynôme nul et des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On note $B_n = (e_0, e_1, ..., e_n)$, la base de S_n définie par :

$\forall k = 0, 1, ..., n, \forall x \in R, e_k(x) = x^k$

1°) A tout réel a, et à toute fonction f de **S**, on associe la fonction $\tau_a(f) = h_a$, définie par :

$\forall x \in R, h_a(x) = f(a+x)$

a) Le réel a étant fixé, montrez que l'application τ_a définie par :

$$\forall f \in S \longmapsto \tau_a(f) = h_a \in S$$

est un endomorphisme de **S**.

τ_a est-elle injective ?

τ_a est-elle surjective ?

b) Quelles sont les valeurs propres de τ_a ?

Quels sont les vecteurs propres associés ?

c) Montrez que S_n est stable par τ_a.

d) Donnez la matrice M_a de la restriction de τ_a à S_n par rapport à la base B_n.

e) Montrez que la matrice M_a est inversible et donnez l'expression de son inverse.

2°) A tout réel a, et à toute fonction f de **S**, on associe la fonction $\varphi_a(f) = g_a$, définie par :

$\forall x \in R, g_a(x) = f(a+x) - f(x)$

a) Le réel a étant fixé, montrez que l'application φ_a ainsi définie:

$$\forall f \in S \longmapsto \varphi_a(f) = g_a \in S$$

est un endomorphisme de **S**.

φ_a est-elle injective ?

φ_a est-elle surjective ?

b) Quelles sont les valeurs propres de φ_a, et les vecteurs propres associés ?

3°) On suppose le réel a non nul. Pour tout entier naturel n, on note T_{n+1} le sous-espace vectoriel de **S** dont une base est $(e_1, e_2, ..., e_{n+1})$. On note **T** le sous-espace vectoriel de **S** dont une base est $(e_k)_{k\geq 1}$.

a) Montrez que la restriction de φ_a à T_{n+1} est un isomorphisme d'espace vectoriel de T_{n+1} sur S_n.

La restriction de φ_a à **T** est-elle un isomorphisme d'espace vectoriel de **T** sur **S** ?

A SUIVRE

b) Application : déterminez les polynômes f_2 et f_3 de T_4 tels que :

$\varphi_a(f_2) = e_2$ et $\varphi_a(f_3) = e_3$

Déduisez-en des expressions des sommes :

$$\sigma_2(N) = \sum_{k=0}^{N} k^2 \quad \text{et} \quad \sigma_3(N) = \sum_{k=0}^{N} k^3$$

Partie II :

1°) On rappelle que E est le R-espace vectoriel des fonctions définies et continues sur R et à valeurs dans R.

On note F la partie de E formée des fonctions bornées.

On note L la partie de E formée des fonctions qui admettent une limite finie en $+\infty$.

a) Le R-espace vectoriel E est-il de dimension finie ?

b) Montrez que F est un sous-espace vectoriel de E.
Le R-espace vectoriel F est-il de dimension finie ?

c) Montrez que L est un sous-espace vectoriel de E
Le R-espace vectoriel L est-il de dimension finie ?

2°) A tout réel a, et à toute fonction f de E, on associe la fonction $\varphi_a(f) = g_a$, définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g_a(x) = f(a+x) - f(x)$$

a) Le réel a étant fixé, montrez que l'application φ_a ainsi définie:

$$\forall f \in E \xmapsto{\varphi_a} \varphi_a(f) = g_a \in E$$

est une application linéaire.

b) Est-elle injective ?
Est-elle surjective ?
On pourra discuter suivant les valeurs de a.

3°) La fonction f étant donnée dans E, on note G l'ensemble de réels défini par :

$$G = \{a \in \mathbf{R} \mid \varphi_a(f) \in L\}$$

a) Montrez que G est un sous-groupe additif de R.

b) Déterminez l'ensemble G pour les fonctions f_k suivantes :

1) $\forall x \in \mathbf{R},\ f_1(x) = x$

2) $\forall x \in \mathbf{R},\ f_2(x) = x^2$

3) $\forall x \in \mathbf{R},\ f_3(x) = \sqrt{|x|}$

4) $\forall x \in \mathbf{R},\ f_4(x) = \cos(x)$

5) $\forall x \in \mathbf{R},\ f_5(x) = \cos(x^2)$

6) $\forall x \in \mathbf{R},\ f_6(x) = \cos(\sqrt{|x|})$

c) On suppose que la fonction f est dérivable sur R, et que sa fonction dérivée a une limite finie en $+\infty$. Déterminez alors l'ensemble G.

4°) Soit f une fonction donnée de E. On note H l'ensemble des réels a tels que l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} (f(a+x) - f(x))\,dx$$

soit convergente.

a) Montrez que H est un sous-groupe additif de R.

b) Déterminez l'ensemble H pour les fonctions f_k suivantes :

1) $\forall x \in \mathbf{R},\ f_1(x) = x$

2) $\forall x \in \mathbf{R},\ f_2(x) = x^2$

3) $\forall x \in \mathbf{R},\ f_3(x) = \sqrt{|x|}$

4) $\forall x \in \mathbf{R},\ f_4(x) = \cos(x)$

5) $\forall x \in \mathbf{R},\ f_5(x) = \cos(x^2)$

6) $\forall x \in \mathbf{R},\ f_6(x) = \cos(\sqrt{|x|})$

c) On suppose que f appartient à L. Déterminez l'ensemble H.

d) On suppose que l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

est convergente. Déterminez l'ensemble H.

Tournez la page S.V.P.

Partie III :

Toutes les suites ou séries considérées dans cette partie sont définies sur **N**.

Dans cette partie, à toute fonction f de E, et à tout réel a, on associe la série $[u_n(a)]$ dont le terme général $u_n(a)$ est défini par :

$$u_n(a) = f(a+n) - f(n)$$

Si cette série est convergente, on note U(a) sa somme, soit :

$$U(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)$$

1°) a) Donnez une condition nécessaire et suffisante (C_1) portant sur f pour que U(1) existe.

b) Pour tout réel λ, on choisit $f = f_\lambda$, la fonction f_λ étant définie par : $\forall x \in R, f_\lambda(x) = \cos(\lambda x)$

Déterminez l'ensemble J_1 des valeurs réelles λ telles que U(1) existe.

c) De même, pour tout réel λ, on choisit $f = k_\lambda$, la fonction k_λ étant définie par :

$$\forall x \in R, k_\lambda(x) = \cos\left(\lambda \frac{x^2+1}{x+1}\right)$$

Déterminez l'ensemble K_1 des valeurs réelles λ telles que U(1) existe.

2°) a) Donnez une condition nécessaire et suffisante (C_2) portant sur f pour que U(2) existe.

b) Pour les fonctions f_λ et k_λ définies ci-dessus, déterminez les ensembles respectifs J_2 et K_2 des valeurs réelles λ telles que U(2) existe.

3°) a) Soit p un entier naturel non nul donné. Donnez une condition nécessaire et suffisante (C_p) portant sur f pour que U(p) existe.

b) Pour les fonctions f_λ et k_λ définies au 1°), on note J_p et K_p les ensembles respectifs de réels λ tels que U(p) existe. Montrez que, si l'entier p est différent de 1, J_p est différent de J_1 et K_p est différent de K_1 (on ne cherchera pas à déterminer les ensembles J_p et K_p).

c) Soit f une fonction vérifiant la condition (C_1).

Calculez $\omega_p = U(p+1) - U(p)$ en utilisant la fonction f. Montrez que la suite $\{\omega_p\}_{p\in N}$ est convergente et précisez sa limite.

4°) Soit f une fonction telle que la série de terme général f(n) soit convergente, et soit V sa somme, soit :

$$V = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$$

Montrez que U(p) existe pour tout entier p, et que la série $[\omega_p]_{p\in N}$ est convergente, et exprimez sa somme Ω en fonction de V.

FIN DE L'ENONCE